Title	高木貞治の数の基礎に関する三部作 (数学史の研究)
Author(s)	足立, 恒雄
Citation	数理解析研究所講究録 (2010), 1677: 141-154
Issue Date	2010-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/141279
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 1677 巻 2010 年 141-154

高木貞治の数の基礎に関する三部作

早稲田大学　足立恒雄

高木貞治は、現在から見れば不思議に思えるのだが、算術の基礎に若いころから関心が深かった。最初に著した『新撰算術』は 1898 年、高木が大学院在学中に書かれたものである。　その後、高木はドイツへ留学し、ヒルベルトに師事、帰国後、教授就任と同時に『新式算術講義』(1904 年：ちくま学芸文庫で復刊) を著した。最後に算術について著したのは『数の概念』(1949 年) である。最初の著書から数えて 50 年、高木の算術の基礎に対する関心は生涯のわたるものであったことは明らかである。

本稿では、高木のこれら三部作の内容を紹介する。(実際には『数学雑談』を含めて四部作だが、紙数制限のためこれは省略する) これによって、高木個人の時勢に応じた数観念の変遷を知ることができるが、同一人による違いは個人の能力の問題とは言えないことから、世界における数に対する思想、それは同時に数学思想、の変遷をも明確に示していて大変興味深い。

1　『新撰算術』(1898)

高木は『数学雑談』(1935 年) の中で、『新撰算術』は乱読によって「鵜呑みにした横文字を縦書きにした」だけの本だと書いている。文字通り受け取って良いとも言えないが、本書によって当時のヨーロッパにおける実数論や公理主義を巡る趨勢を知ることができるのは確かであろう。

第 1 章は自然数の導入から始まる。哲学的議論をするのではなく、読者の常識に訴えるとして、初等教育的に、1 という記号の集まりを持って自然数となすとし、その相等、大小、和、差、積、商を順次定義していく。続いて 0 の定義を「相等しき 2 数の差」として定義する。

> かくの如きものは本来何らの意義を有するものにあらず。単に 1 個の符号たるに過ぎざれども、数の概念を推し広めてこの符号をも数の中に編入することは、思想を表明する上において大いに便宜を得ることあり。しかれどもこの事をなすに当たりては、まず 0 に関する加減乗除の算法の意義を規定し、その普通の数と同一の動作をなすことを確かめざるべからず。

任意の自然数 a に対して $a-a=0$ と定めて、0 の入った規則 $a+0=0+a=a$ 等を導く。負数は巻末の附録まで導入されない。

第 2 章は初等整数論の基礎が解説されている。
第 3 章は有理数の導入が主題である。

> 分数の必要は、連続せる量を計らんとするより起こるものなることは読者の熟知するところなり。然りといえども、数の観念そのものと量との間には必至的の関係あるにはあらず、数は数として独立の存在を有し得べきものなり。量と数との関係は後章に至ってこれを詳論すべければ、今この章において分数の観念を導入せんとするに当たりては単に解析的の側よりして之を考究するにとどむべし。

という目的が述べられて、分数の概念の導入に当たって次のようにその意義が述べられる：

> 整数 (＝自然数) a が b の倍数にあらざるときは、$a \div b$ は本来何らの意義も有せざることはしばしば言へるところなり。(分数の四則などということは) まっく意義を有せざる語にして、こは自家撞着に陥らざる限り、吾輩の随意に規定し得べきことなり。然りといえども、吾輩がいたずらに数の観念を拡張せんと欲する所以のものはこれに依りて論理の汎通と学説の系統の統一とを得んがためなれば、今設けんとする諸々の規定はよくこの目的に叶わんことを要すべし。これに依りてこの新たに定むべきすべての分数に汎通する諸規定は特別の場合に於いて既に整数のために設けたる諸々の規約と一致せざるべからず。

ここに述べられている「論理の汎通」という考え方は、次著『新式算術講義』で詳述されるが、「自家撞着に陥らざる限り、吾輩の随意に規定し得べきことなり」から見られる通り、公理主義的な主張も含んでいる。
この後続いて、分数の相等、大小、稠密性、四則が定義される。さらに $e>1$ なる自然数を取って、e 進小数とその四則が説明される。循環小数になる条件とその周期についての整数論的考察があって第 3 章が終わる。
第 4 章では分数（＝正の有理数）の冪根の概念が無理数の特例として導入される。第 5 章、第 6 章が本書の眼目である。冒頭に、数と量に関する関する長い（当時のヨーロッパの思想をそのまま吐露したらしい）考察がある。当時のヨーロッパにおける数と量に関する見解を知ることができるという意味で大いに関心をそそる個所である。

> そもそも数の観念の久しく明確なるを得ざりしは、数と量とを混同せるに職由せずんばあらず。数と量とは観念そのものの間に必須的の関係あるにあらず、ただ量の大小を比較するに当たり、便利のため数

の助けを借るに過ぎず。（中略：温度や磁力、電流の強さは数値とは本来関係がないことを指摘する。）

分数をもって1の若干等分を集めたるものとなすが如き、数と量とを混同せる迷想に他ならず。元来1という観念は、既に分割すべからずという意義を含有せり。その等分を云々するが如きは、これ譫語なり。かくの如きは量を測定する方便として吾人が随意に定めたる、単位と称する、特別なる1個の量と、1なる数とを混同せるものなり。もとより分数の導入せられたるは、単位の倍に等しからざる量を測定せんとするよりその必要を生じたるものなるべしといへども、こは単に数学の進歩が特殊の事情のために激成せられたりといふに過ぎず。畢竟、分数なるものは2個の整数の群にして、かくの如き群そのものは本来何らの意義をも有するものにあらず。（中略）利用の有無は観念の成立を妨ぐることなし。分数が量の比較に利用せられ得べきは幸いなり。しかれども仮令利用せらるることなからんも、分数の観念は超然その成立を保つことを得べし。翻ってこれを量の側より見んか、量の比較が分数に依りて成され得べきは幸いなり。然れども量の比較は必ずしも数の利用をまたざれば成し得べからざるにあらず。無理数の導入せられたるもまた利用上の必要に基づけり。然れどもこれ無理数成立の歴史なり。無理数の観念はまったく独立して正確に之を定めざるべからず。（中略：数の概念の拡張が外部の事情に負っているために量と数が混同されたのだが、虚数の場合は数学内部の「法則の汎通」の希望に基づくものだった。実際には、数は虚数ばかりではなくたとえ自然数だろうと分数だろうと外界において実在するものではない、という指摘がされる。）今世紀における函数論の発達が、その昔阻害せられたる虚数の地位を高めて之を主人公と為さざるを得ざるの状態を形成せるにおよび、学者は初めてすべて数学上の観念は自家撞着を含まざる定義規約の上に成立し、利用の外に超然たるべきものなるに想着せり。而して虚数の真正の認識せられたる後、無理数および分数の観念初めて明確なるを得たり。数学の進歩は前進してその範囲を拡張し、後顧してその基礎を堅固にし、もって現時の状態に到達せり。以上を数学における数の観念の発達の小史とす。

無理数はまず無限小数として定義されるが、10進数のような「記数法の如きものの上に置かんは極めて幼稚なる方法」で、読者の理解を得るための方便にすぎないとして、続いて「有理数の基本列」による方法が紹介される。これによって無理数の大小、四則が定義され、交換法則、結合法則等の基本法則が証明される。

次に（デデキントに従って）有理数の切断による無理数の定義が紹介される。直観的には数列による方法が理解しやすいのだが、量の理論を論じるためには切断の方法の方が望ましいというのが、実数論が二つの方法で導入される理由である。

二つの方法によって得られる無理数の定義が結局は同一のものであることが示されて第5章が終わる。

第6章は（連続）量の理論を扱う。数というものは抽象的に、量とは独立して定められるものではあるが、量を表さんとして発展してきた経緯を考えれば、数学の適用対象としての量を論じないわけにはいかない、という趣旨が述べられて、同種の量の理論が展開される。

定義. 連続量の定義

1. 同種の量は線型順序をなす。
2. 同種の量は稠密である。
3. 同種の量はデデキント切断の意味で連続である。
4. 同種の量の間の和の基本性質（省略）

自然数 n に対して nA が定義される。また重要な性質として

$$\forall A \forall n \exists B \ (A = nB)$$

が証明される。これによって同種の量に対して有理数域 *) を作用域とすることができ、さらに連続性を使って実数域を作用域とすることができる。逆に言えば、有理数、実数が量から定義される。

注 *) 集合という言葉が使われていないので、有理数体という言葉もない。そこでここでは便宜のため有理数域という用語を使って違いを表現しておくことにする。同種の量というのも、現代から見れば、似たような不思議さを感じさせる用語である。連続量の定義の書き出しを原文で次のようである：

> 吾輩が量、すなわち連続量と称するものは、次の諸条件を具へたるものなりとす。第一は同じ種類の二個の量あるとき、その相等しということ及びその一が他の一より大または小なりということに一定の意義を与へ得べきことなり。

すなわち、同種の量というのが一つの集団（集合）をなしているということが断られていない上、連続量と同種の量との関係もあまりはっきりはしない。量というものには同種の量と異種の量があるらしく見受けられるのである（実際そういうつもりなのであろう）。

次に、量に数値をあてがうためには単位量との比を考える必要があるとして、同種の量の比 A:B という概念がユークリッドの比例論に従って展開される。あるいは、ユークリッドの比例論が現代的に明快な形で解説されたとも言い得る。「数値は量と必至に相随うものにあらずして、単位の選択によりて変動するものなり。」

連続量は実直線のイメージを使って導入されているから、有理域を作用域とするのではなく、最初から実数域を作用域としていることには注意を要する。これは次の著書『新式算術講義』において、実数の定義をデデキントから少し前進して公理的に定めるに至る前段階と位置付けられる。

本章はこれ以降、量の実例の検討に進み、「直線の長さ」、「平面多角形の面積」、「曲線の長さ」、平面図形の面積・体積」等がそれぞれ連続量の公理を満たすことが証明される。とりわけ、多角形の面積が量として把握できることを示す目的で、任意の多角形が長方形に等積であることが詳細に証明されているのが面白い。

1. まず「解析的」方法によって数概念を確定した。（すなわち数体系を量概念とは独立に構成した。）

2. ついで「総合的」方法によっても数概念を定めた。（すなわち、数学の歴史に徴し、量を根拠として数概念を定めた。）

という趣旨の「回顧」を行う。その上で、数学においてはこうした総合的方法に頼るのは良くないという主張がなされる：

> 然れども純正数学の眼孔より考察するときは、かくの如き総合的の方法を採らんは望ましからぬ事なりと謂わざるを得ざるが如し。その故は数の観念をさらに拡張して、いわゆる複素数を導かんとするに至れば、この総合的の方法に於いてはにわかにその歩趨を転ぜざるを得ざれども、解析的の方法に依るときは終始一貫して「算法の汎通」を方針として、同一の歩武をとることを得べきによれり。

この証拠として、負数ならびに虚数の概念の解説へと進む。

「算法、あるいは論理の汎通」という用語のもう一つの意味として、自然数に限定された加法・減法の不自由を打破したいという要求が、算法の汎通と謂う言葉に込められていることがわかるだろう。負数や虚数がどのように導入されるか、これ以後の説明は不要であろう。

量と数の峻別、そして「算法の汎通」（形式不易の原理）とか、「１は単位であるから分割できない」というような表現に当時のヨーロッパ数学の強い影響が認められる。これが「横のものを縦にしただけだ」という後年の回顧を生んだのであろう。しかし、「解析的」と称する、一種の公理主義的な思想が日本の数学界に与えた影響は甚大だったのではなかろうか。

一方、ヨーロッパではむしろ「量の抹殺」という方向性、つまりは「数学の現象世界からの独立」が進んでいたのではないかと思われるのに、第６章以降、量概念の分析に多大の紙数を費やしているのは、寡聞にして知らないだけかもしれないが、本書を ユニークな内容にしているのではないだろうか。

2 『新式算術講義』(1904)

個数を数えるにしても順序を付けざるを得ないから序数が数の基本であるという見解に基づいて自然数の基礎付けが行われる。(個数を基本に据えた『新撰算術』とこの点が違う。)

最初に順序数(自然数)の原則(公理と呼んでもよいが、難しそうな印象を避けたのかもしれない)を列記してある。内容は現代の自然数の公理系に近いが、もう少し一般向けに俗っぽくした書き方である。簡潔のため表現を現代数学式にすると、次のようである:

1. 順序数は線型順序をなす。
2. 各順序数 a には直後の数 a' がある。
3. 最初の順序数がある。
4. b が a より後ならば、a から直後の数、その直後の数、と続けていけば、しまいには b に達する。

最後の公理は数学的帰納法を成立させるための公理だが、「…」を使ったのに等しい表現で厳密性に欠けるが、一般読者のためにわざとそうしたのであろう。

最初の自然数を 1 とし、1 の直後の数を 2 とし、というようにして自然数が定義される。また 0 を導入しなければ大変不便であるという理由で 0 が数として導入される。

第 2 章では、「続けて勘定する」という基本方針に基づいて加法、乗法が定義され、可換法則や結合法則等が証明される。数える順序に依らず個数(基数)が定まるという事実はディリクレによって最初に厳密に証明されたという指摘があって、数ページを要して証明が与えられている。加法、乗法の逆演算として減法、除法が導入される。その後、割り算の原理の説明があって、10 進展開が定義される。

第 3 章は整数の導入である。『新撰算術』では負数の導入が「附録」扱いされていたのに対し、負数がずいぶんと出世した印象を与える。やむをえず導入するという姿勢から、一方向だけではなく両方向に数が並んでいる方が応用面ばかりではなく、本質的だという認識に変わったように見受けられる。それなら、自然数からではなく整数の導入から始めればよいようなものだが、それを実行しなかったのは一般読者に対する配慮が働いた結果のようである。しかし、ヨーロッパの数学では、未だに自然数から始めるのが通例だから、高木のやり方は「進んだ (advanced)」な印象を与える。しかしまだ集合という用語は使われない。

「広義の数」、すなわち整数の公理系(今度は原則とは言っているが、脚注で、「現代の数学では、公理と称すべし」と述べている)は次のようである:

1. 数は線型順序をなす。

2. 各数には直後の数と直前の数がある。

3. b が a より後ならば、a から直後の数、その直後の数、と続けていけば、しまいには b に達する。

> 以上は数及び大小という語の定義なり。なぜに数はかくあらざるべからざるかといふは意義なき疑問なり。しばらく吾人は数の観念を失へりとすべし。これ時に当たりて卒然吾人の面前に投ぜられたるは上文の定義にして、数とはかかるものぞと告げられたる吾人はこの三カ条の規定を前提となして、ここに定められたる「数」なるものの性質を研究せんとす。これ吾人の立脚点なり。

大した意味のない文章のようだが、数の場合、デデキント他の人たちによって公理化されてから百数十年経つから、高木の上の文章を今読んでも何の感慨も持たないかもしれないが、当時は「こんな（公理的な）やり方では数とは何かに少しも答えていない」というような声がまだまだあったと考えれば、事情を察することができるだろう。

この後に整数の四則の定義が続くが、たとえば $a+b$ の定義を回帰的に与えるなど、極めて公理主義的な扱いが目立ってくる。ここでも抽象的に負数の演算を定義したのを「一見はなはだ唐突、不自然、形式的なる観あるに似たりといへども、つらつら考ふれば、かく抽象的に根本的の観念を定むるは、かへってその観念の応用の区域を拡大する所以なるを知るべし。云々」の言葉が続き、読者層に公理主義を受け入れさせるのが大変難事であったことをうかがわせるに足る。もう少し穿った見方をすれば、高木自身にとっても、公理主義は新思想だったと言えないだろうか。ヒルベルトの『幾何学基礎論』が出版されて間もないことも考え合わせれば、本書は公理主義の最も初期の著作だっただろう。こういう点も評価すべきであろう。

第 4 章は初等整数論である。

第 5 章は分数を整数の順序関係を延長するという立場に立って導入している。

第 6 章は分数の持つ整数論的考察に割かれている。

第 7 章ではハンケル (1839-1873) の「形式不易の原理」に基づいて減法や除法の定義の必然性を説明している。「算法の汎通の要求をもって数の範囲を拡張するの動因となす」というこの原理はハンケルが 1878 年に出版した著書で命名されたと書かれているが、実際には半世紀前のイギリスの数学者ピーコック（1791-1858）の著書『代数学』（1830）にまで遡るのではないだろうか。

ヨーロッパでも負数は使われてはいたが、ギリシア以来の「数＝個数」という思想の束縛があって、負数の数としての正当化（意味付け）に苦しんだ歴史がある。カッツ『数学の歴史』によると、18 世紀から 19 世紀にかけては虚数と負数を一切放棄した代数学の教科書すらあったという。ピーコックの提唱はたとえば $a>b,\ c>d$ で成り立つ公式

$$(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+ad$$

を制限なしに認めることによって、

$$(-a)(-d) = ad$$

を正当化するというやり方であった。こうした方式を「形式普遍の原理」(the principle of the permanence of equivalent forms) と名付けている。ヘンケルの考え方はこの延長線上にあるのは間違いないだろう。

高木は、形式不易の原理は自然数から有理数に達するには自然なことであるが、無理数を定義しようとするとこの方式はまったく無力だという指摘をする。つまり「この章における研究は分析的なり、既知の事実を新見地より観察せんとするなり。」

第8章では、「常識と学問とを連結せん」がためにまず(連続)量の理論が展開される。量概念の公理系は『新撰算術』と変わらない。ユークリッドの互除法によって公約量を見つけられない場合は、相互の比は無理数ということになって、必然的に無理数が登場する。

> A, B が公約なき場合に於ける $A:B$ なる比の値は、即ち吾輩のこれより説明せんとする無理数に外ならず。ユークリッドの比の定義より無理数の観念に到達するは、実に一挙手一投足のみ。ユークリッドの比例論は実質に於いて、現代数学における数の観念の凡ての要素を備へたり。数の観念の完成とユークリッド比例論との間に、歴史が二千載の空隙を示せること、今にして想へば、実に奇異なりと謂ふべし。事実を知るは易し。その価値を批判するは難し。要はただ立脚点の昂上にあり。

続いて、稠密性と連続性の違いを説明し、連続性という「この微妙なる観念」を捕捉したということでデデキントを顕彰している。

> 「人もし上の(連続性の)原則を明白にして、少しも直線なるものに対する自家の所観に悖るところなしとなさば、我が幸い之に過ぎず。如何にとならば余はこの原則のはたして正当なるや否やを証明すること能はず、しかもこれ何人といえども、成し得べからざることに属すればなり」と。読者請ふ深くこの語を翫味せよ。もし或いはこの原則の正否を論証せんと欲するの誘惑を感ぜば、まずそもそも証明とは如何なることなるかを想へ。証明なきは能はざるに非ず、能ふ可からざるなり。

そして最終節で、切断の方式に従った正実数(「実数」という言葉を, 当時の習慣なのだろうが、高木は不思議なほど使わない)の定義が与えられる。

定義. *1.* 数には順序があり、二つの数 $x,\ y$ に対して

$$x > y,\ x = y,\ x > y$$

のいずれか一つが成り立つ。また最小の数 0 がある。

2. 数の間には加法が施され、可換性、結合性の他に、$b > b'$ ならば $a+b > a+b'$、および $a \geq b$ ならば $a = b + c$ なる数 c が存在する。

3. デデキントの意味で連続性が成り立つ。

最後に長い脚注が付されている。趣旨は無理数（実数と言うべきだと思うが）の観念が厳密に説明されたのはワイアシュトラス、カントル、ハイネ、メレー、デデキントの貢献であるが、**これらの方法はすべて有理数を既知の観念として、これを基礎にして無理数の観念を定めている**ので、その方法は「開発的 (genetisch, heuristisch)」であると指摘している。「発生論的」（あるいは「発生史的」）と呼ぶ方が良いのではないだろうか。

それに対して、本書の方法はデデキントの法則に従いながらも「アキシオマチック（公理的）」の方法に準じて数の観念を説明したと書いている。ランダウの『解析の基礎』(1929) も「発生史的」な与え方をしているのを見ると、上の定義のような公理的特徴付けは高木のオリジナルなのではないだろうか。（また高木の書き方からもだれかの受け売りだというようには受け取れない。）

さらに脚注には「ただし本邦の一般読書界の程度を顧慮して」論理の厳密性を期さなかったと続けている。つまり、先のヨーロッパの数学者の方法は量概念のことは読者に一任してしまっているが、自分はまず量の性質を説いたのだというわけである。

これはこれで見識だとは思うが、ごたごたした印象が拭えないし、実数の定義が何なのか強調が足りなくて読み取りにくいのも事実である。また、負の実数は後から追加というのも、整数を正負同時に導入するという見識を示していながら首尾が一貫しない感じを与える。

実数の体系を公理的に与えた場合にその後どう展開していくのかの処方も脚注の最後に与えられている。すなわち、0 は与えられているので、それより大きい任意の一数を採り、これを 1 と名付ける。$1+1$ をもって 2 と名付ける。等々。さらに連続の公理から等分ができて分数が導入できる。といった次第で数の体系が定まっていくと述べている。既存の有理数体をこの体系の中に埋め込む方法が述べられているのである。

本書を最も特徴付けているのは、実数の議論に先立って量の理論を展開するところである。量からの独立、あるいは量の抹殺が進行した時代に、これだけ量にこだわった著作も珍しいのではないだろうか。

3 『数の概念』(1949)

高木は1936年に大学を退職したが、1949年（74歳）になって最後の著書である『数の概念』を出版した。『新撰算術』の発刊から数えて50年後に当たることに注目すべきであろう。

試作段階の『数学雑談』でもまだ量の理論から出発していたのだが、『数の概念』では一転して、量の概念には触れず、「哲学的傾向を有する人々の関心をひくべき問題」として、純然と数の体系の基礎が論じられている。量を数概念に生かすのであろうと、数を量に応用するのであろうと、そうしたことにはまったく触れないのも数学の変化に根差すのであろう。藤澤利喜太郎が提唱したという数学の現代化（公田蔵氏、2007年度日本数学会秋季総合分科会講演）がこういう形で結実したという証拠となるだろう。実際われわれは数学の授業で量について何も聞かされたことはない。

「前書き」において集合、写像に関する基礎概念が説明される。また記述はまったく公理的である。そのおかげで記述が明快簡潔になり、（すくなくともわれわれにとっては）前2著とは比較にならないほど読み易くなっている。その間50年あまりの数学の「現代化」がどれほど大きなものであったかがよくわかる。つまり、数学が発展したというとき先端分野の結果の豊富さを頭に浮かべるのが普通だが、集合、写像、論証といった数学を支える基礎概念の整備が著しく進んで、曖昧さがなくなってきたということも「発展」の中に含まれているということが、半世紀の間に同一人物の書いた著書を比較することによって実感されるのである。（20代のころに書いたものより、70代になって書いたものの方が明快で簡潔というのも不思議な印象を与えるものではある。）

第1章は整数の体系が公理的に与えられる。「序」に、次のようなとても意味深い言葉がある。

> 我々の整数は、物の数でもなく、物の順序を示すものでもない。しかし、物の数を示すためにも、物の順序を示すためにも、なお一般に、物の標識（符牒）としても用いられる。0は加法の基準として、我々が任意に整数の体系の中から取り出した一つの整数である。それは、無を示すものではない。… 事実は、我々が常用の言語に順応して、我々の記号0, 1, 2を零、一、二と呼ぶことにしたのである。

旧2著における認識との際立った違いが耳目を集めるに足る。続いて、自然数から入るのではなく、最初から正負の整数を導入するのだが、「順序とか計量とかいった用途の差別を抽象し去って、自然数を整数の一部分とみな」し、「整数（の全体）を1対1の自己対応を許す不可分なる一体系として規定する」方が、「必ずしも不自然ではなく、数学的には、むしろ簡明である」という精神は私（足立）の意に大いに適う。私は、0も1も整数の中から選ばれたのですらない、実数の中から目印として任意に二つ選ばれたのだと、いう形で高木の思想を徹底させたい。

自然数の体系の場合はペアノの公理系があるが、負数を最初から正数と同等に扱うのは、近代以降、高木が最初ではないだろうか。東洋では、古来負数が正数と同等の扱いを受けてきたという伝統を考えれば、東洋人としての遺伝子が目覚めたのではないかと思うのだが、これは思い入れが過ぎるというものだろう。

第二章は有理数（分数）とその四則の導入で、これはごく普通の（整数のペアの類別という）方法に従って展開されている。最後に、つぎの重要な定理の証明が与えられている：

定理 (カントル). R は順序集合で、*(1)* 稠密、*(2)* 無限界、かつ *(3)* 可附番であるとする。然らば、R は有理数全体の集合と順序同型である。

第三章「実数」が最終章であり、本書の眼目である。まず、実数体の公理系として次が与えられている：

定義. 空でない線型順序集合 $\mathbb{R}$ は次の条件を満たすとき連続体と呼ばれる：

I （連続性公理）　$\mathfrak{R}$ はデデキントの意味で連続である。

II （非有界性公理）$\mathbb{R}$ は非有界であるである。

III （加法公理）　$\mathfrak{R}$ は順序加群をなす。

この公理系はデデキント『連続性と無理数』に由来するものであるらしい:

> 有理数の数論の展開は、ここにはいうまでもなく、仮定しておくが、（中略）私の見るところでは、数論全体が、数えるという最も単純な数論的行為の必然的な、あるいは少なくとも自然な結果であって、その数えること自身は、正の整数の無限系列を順次に創造することにほかならない。（中略）さてそのつぎの動機が何であったとしても、経験、直観とのどんな比較または類似がそこに導いていったとしても、… ただこの間接的算法の遂行における制限（足立注ー減法、除法が自由にできないこと）こそは、そのたびごとに一つの新たな創造の行為の、本来の意味での原因となったことだけは間違いない。こうして負数と分数とは人間の精神によって創造されたし、あらゆる有理数の集合という、無限にずっと多くの完全性を備えた道具を得たのである。

この後に、有理数体の四則演算ができるという性質よりは、現在の目的のためには、順序を備えていて、無限界であるという性質の方がもっと重要である、という有理数体の直線との類似性の指摘が続く。

> 今までに普通行われていた無理数の導入は、いわば直接に外延的な大きさの概念に結びついているーしかもその概念自身はどこにも厳密に定義されていないがーそうして数というものを、このような大きさをもう一つ別の同種の大きさで測った結果として説明している *)。それとは反対に、私は数論はそれ自身のうちから展開させるべきものと要求する。
>
> このような数論的でない表象に結びつけて、つぎの数概念の拡張が行われたということは一般に承認されていると言えるだろうが（しかしこのことは複素数の導入に際しては確かに当てはまらなかった）、このことには、こうした縁のない種類の考察を数論、すなわち数の科学のうちに取り入れるための根拠は何もないのである。負数および分数なる有理数が自由な創造によってうち立てられたように、またこれらの数を扱う計算の法則が正の整数を扱う計算の法則に引き直されなければならないし、それが可能であるのと全く同じように、無理数もまた有理数だけによって余すところなく定義されるように努力しなければならない。
>
> 原注 *)　この数の定義は一般性において優れているように見えるが、この優位性は複素数を考えるならばただちに消え去ってしまう。私の見解では、これとは逆に、同種の大きさの比という概念は、無理数がすでに導入されて初めて明瞭に展開され得るのである。（デデキント『無限と連続』）

この文章によって、19 世紀の後半には、数の体系を量から独立させる試み、言い換えれば、オイラー以来の伝統となった（数とは量の比なりという）実数観の見直しが始まっていたということがわかる。

高木はデデキントが連続性公理を詳述しながらも、実直線が（四則演算で閉じた）体をなすのは当然だとして考察を終えている理由については「連続公理の創意者デデキンドに於いて、この論点が十分に強調されていなかったのは、エウクレイデス以来の伝統として、加法があまりにも当然なる原則として黙認されていたためであろう」と推察しているが、以上の引用によってちょっと異なった印象を受けるのである。

高木は次のように述べている：

> 我々は実数の集合を、加法公理を許す 1 次元連続体（足立注：実直線のこと）として規定した。加法公理は合同の概念を根拠とするもので、それは空間（直線）の場合、最も直感的というべきものであろうが、時間に適用するとき、事情は一変する。**時間の合同ということは、間接的、規約的（conventional）である。**

時間の合同性が間接的、規約的である、という意味を高木貞治がどういうつもりで使っているのかはわからない。ごく普通に時間というものを考えるなら、（高

木は時計といったconventionalなものを持ち出しても駄目だというが、）時計がなくとも日数の計算は加法で行うから、直線同様に、十分に合同性、言い換えれば加法性を備えているように思われる。

上述のように、実直線の順序加群は合同の概念を背景としていることを高木は十分認識しており、附録において合同公理から加法公理を導いている。しかし合同変換、あるいは「移動」を元にせず、どうしてこのようなむき出しの代数的構造を公理として採用する方が良いと判断するのか、その心理的背景は私にはわからない。なぜ、合同変換の方がより自然に見えるかということだが、直線をイメージしている限り、代数構造より合同変換の方が自然だからであるからであり、さらに加群の構造を認めることは少なくとも0を特別な点として先験的に認めることになり、第2章で整数の体系を公理化したとき、0は目印にすぎないと書いた意図からすれば一貫性を欠くからである。おそらくは、高木の場合、幾何的イメージを避けたい強い心理的理由があったのだろうと想像される。

カントルは順序型に関する考察において実直線に次のような特徴付けを与えた：

定義. 空ではない線型順序集合$\mathbb{X}$が次の性質を持つとき連続体と呼ばれる：

I （無限界性）$\mathbb{X}$は上にも下にも有界ではない。

II （連続性）$\mathbb{X}$はデデキントの意味で連続である。

III （可分性）$\mathbb{X}$は稠密な可算部分集合を持つ。

問題点としては、 稠密な可算集合に有理数体の構造を付与するのにはかなり技巧的な手段が用いられることもあるが、結局は有理数体が稠密に含まれているという仮定をするのと同じことであることが挙げられる。

高木は先の文章に続けて、合同概念に基づかない方法として、加法公理の代わりに可分性を使う方法は、「空間にも、時間にも、同様に適用される所に、興味がある」という評価を与えている。その上で、「我々は更に一歩を進めて、技巧的なる’可附番’をも払拭して、直截的」な方法として可分性に代えて、

II′.（最小性） 連続かつ無限界なる線型順序集合はすべて$\mathbb{X}$と同型なる部分集合を持つ。

という公理を導入する。（このあたり、あまり読み易くない。）また選択公理を(自覚の上だが)使用しているのも気になるところである。II’の代わりに上江洲忠弘氏は次の修正案を案出してくださった。これとIIとの同値性の証明には選択公理は必要ではない：

II”（最小性） $\mathbb{X}$の部分集合が無限界で連続ならば$\mathbb{X}$と同型である。

私の観点から言えば、自然数の構成から始めるのではなく、冒頭に負まで含めた整数の構成を取り上げたのは見識だと思うが、それとは異なる手段に依って有理数体が構成され、続いて上記のように（まったく別の手法で）新たに実数体の概念を導入する意図も理解できない。デデキントの時代と違って、実数体そのものが(有理数体同様) 人間精神が創造したものだという認識、あるいは少なくとも、数学の対象は公理的に特徴付けられるものだという認識は現在では共通認識になっているからである。高木が本書を書いた時期では、未だ自然数（あるいは整数、あるいは有理数）は天与の体系である、あるいは実数よりは基本的な存在であるという意識が働いていたのかもしれない。

『数学雑談』に縷々述べられた未定稿であるという感慨が『数の概念』で解消され、これが数概念に関する高木の最終的な結論の表明なのかという観点から眺めるとき、なおまだ研究途上の思索を披露したという印象を与える。

『数の概念』では、整数や有理数というものが先に開拓されいる。その結果を用いながら、全く別の方法で数直線が公理的に考察され、有理数が実数の中に埋蔵されるという方式は、二度手間ではないだろうか。可能なことなら、正負の整数ばかりではなく、高木は実はすべての数が同等だという見方をしても良いのではないだろうか（小数の演算の普及に功績のあったステヴィンの言葉を真似すれば「数に貴賤はない」のである）。ひょっとすると、量の比として数を定義する（あるいは少なくとも量を扱ってから数を導入する）という思想でそれまで長らく思索を続けてきた関係上、本稿の最初に述べたことだが、量の比として実数を定義するという方式は有理数体がアプリオリに存在しないとする（つまり有理数も同時に定義するという）場合、実数の定義は曖昧な印象を与えることにならざるを得ないことを嫌ったことが心理的に尾を引いていたのかもしれない。再度言うと、有理数についてはスキップして、実数体と一体的に導入するという方法を高木は選択し得たように思うが、なぜそうしなかったのか、単に時代的制約だったのか、上に述べたような心理的抵抗があったのか、それとも何か思想的根拠があるのか、直接聞いてみたいような気がする。